**Санкт-Петербургский государственный университет**

**Р А Б О Ч А Я П Р О Г Р А М М А**

**УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ**

Вариационное исчисление

Calculus of Variations

**Язык(и) обучения**

русский

Трудоемкость в зачетных единицах: 3

Регистрационный номер рабочей программы: 051537

**Раздел 1. Характеристики учебных занятий**

**1.1. Цели и задачи учебных занятий**

Обучение студентов основным методам классического вариационного исчисления и ознакомление их на примере квадратичных функционалов с элементами прямых методов вариационного исчисления. Подготовка студентов к восприятию других дисциплин, использующих методы вариационного исчисления. Развитие навыков самостоятельного решения практических задач.

**1.2. Требования подготовленности обучающегося к освоению содержания учебных занятий (пререквизиты)**

Для успешного освоения дисциплины студент должен иметь предварительную подготовку по математическому анализу и обыкновенным дифференциальным уравнениям в объеме первых полутора курсов математико-механического факультета.

**1.3. Перечень результатов обучения (learning outcomes)**

Иметь фундаментальную подготовку по основам профессиональных знаний и быть готовым использованию их в профессиональной деятельности. Уметь строго доказать утверждение, корректно поставить задачу, формулировать результат проведённых исследований в виде конкретных рекомендаций, выраженных в терминах предметной области изучавшегося явления. Владеть методами исследования математических моделей, описывающих проблемы естествознания и техники в виде абстрактных задач теории операторов. Иметь способность к творческому применению, развитию и реализации математически сложных алгоритмов в современных специализированных программных комплексах.  
  
Выпускник должен знать содержание дисциплины «Вариационное исчисление», уметь применять его на практике. Обладать техникой нахождения необходимых условий экстремума для интегральных функционалов с различными видами ограничений. Уметь пользоваться достаточными условиями локального минимума.  
  
**1.4. Перечень и объём активных и интерактивных форм учебных занятий**

Аудиторная учебная работа: практические занятия, консультации.

**Раздел 2. Организация, структура и содержание учебных занятий**

**2.1. Организация учебных занятий**

**2.1.1 Основной курс**

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Трудоёмкость, объёмы учебной работы и наполняемость групп обучающихся | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| Код модуля в составе дисциплины,  практики и т.п. | Контактная работа обучающихся с преподавателем | | | | | | | | | | | | Самостоятельная работа | | | | Объём активных и интерактивных  форм учебных занятий | Трудоёмкость |
| лекции | семинары | консультации | практические  занятия | лабораторные работы | контрольные работы | коллоквиумы | текущий контроль | промежуточная  аттестация | итоговая аттестация | под руководством преподавателя | в присутствии  преподавателя | сам. раб. с использованием  методических материалов | текущий контроль (сам.раб.) | промежуточная аттестация (сам.раб.) | итоговая аттестация  (сам.раб.) |
| ОСНОВНАЯ ТРАЕКТОРИЯ | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| Форма обучения: очная | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| Семестр 4 | 30 |  | 2 | 15 |  |  |  |  | 2 |  |  |  | 31 |  | 28 |  | 20 | 3 |
|  | 1-25 |  | 1-25 | 1-25 |  |  |  |  | 1-25 |  |  |  | 1-1 |  | 1-1 |  |  |  |
| ИТОГО | 30 |  | 2 | 15 |  |  |  |  | 2 |  |  |  | 31 |  | 28 |  |  | 3 |

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Виды, формы и сроки текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации | | | | | | | |
| Код модуля в составе дисциплины, практики и т.п. | Формы текущего контроля успеваемости | | Виды промежуточной аттестации | | | Виды итоговой аттестации  (только для программ итоговой аттестации и дополнительных образовательных программ) | |
| Формы | Сроки | Виды | | Сроки | Виды | Сроки |
| ОСНОВНАЯ ТРАЕКТОРИЯ | | | | | | | |
| Форма обучения очная | | | | | | | |
| Семестр 4 |  |  | экзамен, устно, традиционная форма | по графику промежуточной аттестации | |  |  |

**2.2. Структура и содержание учебных занятий**

**I. ВВЕДЕНИЕ**

1**.**1.Постановка классических задач вариационного исчисления: задача о брахистохроне, задача о цепной линии, задача Дидоны.

1.2. Основные леммы вариационного исчисления.

**II. НЕОБХОДИМЫЕ УСЛОВИЯ ЭКСТРЕМУМА В НОРМИРОВАННОМ ПРОСТРАНСТВЕ**

2.1**.** Линейные нормированные пространства, ограниченные функционалы.

2.2. Производная по направлению. Дифференциал Гато и дифференциал Фреше. Их свойства.

2.3. Непрерывно дифференцируемые по Фреше функционалы.

2.4. Необходимое условие экстремума во всем пространстве.

2.5. Необходимое условие экстремума на выпуклом множестве.

2.6. Необходимое условие экстремума на поверхности уровня (теорема о неопределенных множителях Лагранжа).

**III. НЕОБХОДИМЫЕ УСЛОВИЯ ЭКСТРЕМУМА ДЛЯ ИНТЕГРАЛЬНОГО ФУНКЦИОНАЛА.**

3.1. Непрерывные и непрерывно дифференцируемые интегральные функционалы на пространстве непрерывно дифференцируемых функций.

3.2. Необходимые условия экстремума интегрального функционала с закрепленными концами. Уравнение Эйлера.

3.3. Необходимое условие экстремума интегрального функционала со свободными концами. Уравнение Эйлера, естественные граничные условия.

3.4. Гладкость решения уравнения Эйлера.

3.5. Пример отсутствия гладкости экстремали. Пример недостижимости глобального минимума.

3.6. Изопериметрическая задача для интегрального функционала.

**IV. ОБЩАЯ ФОРМА ПЕРВОЙ ВАРИАЦИИ.**

4.1. Вычисление общей формы первой вариации.

4.2. Условие трансверсальности.

4.3. Экстремали с разрывной производной. Условия Вейерштрасса-Эрдмана.

4.4. Односторонние задачи: постановка, необходимые условия экстремума.

**V. МНОГОМЕРНЫЕ ВАРИАЦИОННЫЕ ЗАДАЧИ.**

5.1. Леммы вариационного исчисления и формула интегрирования по частям в многомерном случае.

5.2. Уравнение Эйлера и естественные граничные условия.

5.3. Принцип наименьшего действия и уравнение колебания струны.

**VI. НЕОБХОДИМЫЕ И ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ ЛОКАЛЬНОГО МИНИМУМА.**

6.1. Вычисление второй вариации интегрального функционала.

6.2. Необходимые условия локального минимума: не отрицательность второй вариации, условие Лежандра, условия Якоби.

6.3. Достаточные условия локального минимума: положительность второй вариации, усиленное условие Якоби.

**VII. ПРЯМЫЕ МЕТОДЫ ВАРИАЦИОННОГО ИСЧИСЛЕНИЯ.**

7.1. Банаховы пространства, рефлексивные банаховы пространства. Слабая сходимость и ее свойства.

7.2. Гильбертовы пространства. Слабая сходимость в гильбертовом пространстве. Ортонормированные и полные ортонормированные системы.

7.3. Слабо замкнутые множества в гильбертовом пространстве, примеры слабо замкнутых множеств.

7.4. Теорема о существовании глобального минимума.

**VIII. ВАРИАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ И ЗАДАЧА ШТУРМА-ЛИУВИЛЛЯ.**

8.1. Абсолютно непрерывные функции: определение, формула Ньютона-Лейбница, формула интегрирования по частям.

8.2. Пространство С.Л. Соболева: определение, норма, полнота, скалярное произведение.

8.3. Компактные множества и компактные операторы. Критерий компактности в пространстве непрерывных функций.

8.4. Ограниченность и компактность оператора вложения пространства Соболева в пространство непрерывных функций. Равномерная сходимость слабо сходящейся последовательности пространства Соболева.

8.5. Примеры замкнутых линейных подпространств пространства Соболева, примеры слабо замкнутых подмножеств пространства Соболева.

8.6. Классическая и обобщенная постановки задачи Штурма-Лиувилля. Теорема единственности решения.

8.7. Классическая и обобщенная постановки задачи на собственные числа и собственныефункции для оператора Штурма-Лиувилля, простота и ограниченность снизу собственных чисел, ортогональность собственных функций с различными собственными числами, возможные точки сгущения множества собственных чисел.

8.8. Построение собственных чисел и собственных функций с помощью решения изопериметрической задачи, полнота ортонормированной системы собственныхфункций в энергетическом пространстве и пространстве квадратично суммируемых функций, теоремы Фредгольма для задачи Штурма-Лиувилля и метод Фурье ее решения.

**Раздел 3. Обеспечение учебных занятий**

**3.1. Методическое обеспечение**

**3.1.1 Методические указания по освоению дисциплины**

По курсу вариационного исчисления предусмотрено чтение лекций и проведение практических занятий. Лекции читают и проводят практические занятия опытные преподаватели с большим стажем работы. Все студенты должны быть обеспечены учебниками, рекомендованными по курсу.

**3.1.2 Методическое обеспечение самостоятельной работы**

При выполнении домашних и контрольных заданий студенту необходимо знать содержание лекций, уметь формулировать определения основных понятий и утверждений, уметь применять методы их доказательств при решении конкретных задач.  
  
Перечень примерных контрольных вопросов и заданий для самостоятельной работы:  
1. Вывод уравнения Эйлера и получение естественных граничных условий для конкретных интегральных функционалов.  
2. Решение классических задач вариационного исчисления.  
3. Изопериметрические задачи.  
4. Функционалы геометрической оптики.  
5. Многомерные интегральные функционалы и принцип наименьшего действия.  
  
**3.1.3 Методика проведения текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации и критерии оценивания**

Экзамен проводится в устной форме. Билет состоит из двух вопросов. Время подготовки ответа на вопросы билета составляет 60 минут.

Использование конспектов и учебников, а также электронных устройств хранения, обработки или передачи информации при подготовке и ответе на вопросы экзамена не разрешается. В случае обнаружения факта использования недозволенных материалов (устройств) составляется акт, и студент удаляется с экзамена.

После ответа на вопросы билета преподаватель задает несколько дополнительных вопросов, на основании оценки ответов на которые итоговая оценка по предмету может быть повышена или понижена.

*Критерии выставления оценок:*

Оценка «отлично» ставится за полностью раскрытый теоретический материал и правильные ответы на дополнительные вопросы преподавателя.

Оценка «хорошо» ставится за изложенный теоретический материал билета (возможно с помощью наводящих подсказок преподавателя) и правильные ответы на дополнительные вопросы преподавателя.

Оценка «удовлетворительно» ставится за знание ответов на основные вопросы по каждой теме.

Оценка «неудовлетворительно» выставляется, если не выполняются условия для получения оценок «отлично», «хорошо» и «удовлетворительно».

**3.1.4 Методические материалы для проведения текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации (контрольно-измерительные материалы, оценочные средства)**

Примерный перечень вопросов, выносимых на экзамен:

1. Примеры классических задач вариационного исчисления. Четыре леммы вариационного исчисления.
2. Дифференциалы Гато и Фреше функционала в нормированном пространстве. Необходимые условия локального минимума функционала во всем пространстве, на выпуклом множестве, на поверхности уровня другого функционала.
3. Непрерывность и непрерывная дифференцируемость интегрального функционала. Необходимое условие экстремума интегрального функционала: уравнение Эйлера, естественные граничные условия, гладкость экстремали. Примеры отсутствия глобального минимума и отсутствия дополнительной гладкости у экстремали.
4. Общая форма первой вариации и условие трансверсальности.
5. Общая форма первой вариации и условия Вейерштрасса-Эрдмана.
6. Односторонняя задача для интегрального функционала.
7. Уравнение Эйлера и естественные граничные условия для многомерной задачи. Принцип наименьшего действия. Уравнение колебания струны.
8. Вычисление второй вариации интегрального функционала. Неотрицательность второй вариации – необходимое условие локального минимума.
9. Вычисление второй вариации интегрального функционала. Условие Лежандра – необходимое условие локального минимума.
10. Условие Якоби – необходимое условие локального минимума.
11. Вычисление второй вариации интегрального функционала. Положительность второй вариации – достаточное условие локального минимума.
12. Усиленное условие Якоби – достаточное условие локального минимума.
13. Слабая сходимость в гильбертовом пространстве и ее свойства. Слабо полунепрерывные снизу функционалы. Слабо замкнутые множества. Теорема о достижимости глобального минимума слабо полунепрерывным снизу коэрцитивным функционалом на слабо замкнутом множестве. Пример отсутствия глобального минимума у непрерывного коэрцитивного функционала.
14. Пространство Соболева на отрезке: абсолютно непрерывные функции, формулы Ньютона-Лейбница и интегрирования по частям, норма и скалярное произведение, полнота, компактность оператора вложения пространства Соболева в пространство непрерывных функций, слабая сходимость в пространстве Соболева.
15. Классическая и обобщенная постановки задачи Штурма-Лиувилля. Их эквивалентность. Теорема единственности.
16. Существование решения у задачи Штурма – Лиувилля при достаточно большем коэффициенте q. Вариационный метод ее решения.
17. Задача на собственные функции и собственные числа оператора Штурма-Лиувилля. Классическая и обобщенная постановки. Энергетическое пространство и энергетическое скалярное произведение. Простота собственного числа. Ортогональность собственных функций, отвечающим различным собственным числам в энергетическом пространстве и пространстве квадратично суммируемых функций. Отрезки ряда Фурье в этих пространствах.
18. Не более чем счетность множества собственных чисел. Его точки сгущения.
19. Существование собственного числа и собственной функции у оператора Штурма-Лиувилля. Построение бесконечной системы собственных чисел и собственных функций. Полнота этой системы в энергетическом пространстве и пространстве квадратично суммируемых функций. Построенные собственные числа и собственные функции – все собственные числа и собственные функции оператора Штурма-Лиувилля.
20. Альтернативы Фредгольма. Обсуждение конечномерного случая. Пример их невыполнения в бесконечномерном случае. Альтернативы Фредгольма для задачи Штурма-Лиувилля.

**3.1.5 Методические материалы для оценки обучающимися содержания и качества учебного процесса**

Примерная анкета-отзыв по преподаванию дисциплины

Просим Вас заполнить анонимную анкету-отзыв по пройденному Вами курсу. Обобщенные данные анкет будут использованы для совершенствования преподавания. По каждому вопросу проставьте соответствующие оценки по шкале от 1 до 10 баллов (обведите выбранный Вами балл). В случае необходимости впишите свои комментарии.

1. Насколько Вы удовлетворены содержанием дисциплины в целом?

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10

Комментарий\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

1. Насколько Вы удовлетворены формами преподавания?

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10

Комментарий\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

1. Как Вы оцениваете качество подготовки предложенных учебно–методических материалов?

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10

Комментарий\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

1. Насколько Вы удовлетворены использованием преподавателями интерактивных и активных методов обучения ?

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10

Комментарий\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

1. Какие из тем дисциплины Вы считаете наиболее полезными, ценными с точки зрения дальнейшего обучения и/или применения в последующей практической деятельности?
2. Что бы Вы предложили изменить в методическом и содержательном плане для совершенствования преподавания данной дисциплины?

СПАСИБО!

**3.2. Кадровое обеспечение**

**3.2.1 Образование и (или) квалификация штатных преподавателей и иных лиц, допущенных к проведению учебных занятий**

К чтению лекций должны привлекаться преподаватели, имеющие ученую степень кандидата или доктора наук (в том числе степень PhD, прошедшую установленную процедуру признания и установления эквивалентности). Преподаватели, привлекаемые к проведению практических занятий, должны иметь базовое образование и/или ученую степень, соответствующие профилю преподаваемой дисциплины.

**3.2.2 Обеспечение учебно-вспомогательным и (или) иным персоналом**

Не предполагается.

**3.3. Материально-техническое обеспечение**

**3.3.1 Характеристики аудиторий (помещений, мест) для проведения занятий**

Стандартно оборудованные лекционные аудитории, аудитории для практических занятий.

**3.3.2 Характеристики аудиторного оборудования, в том числе неспециализированного компьютерного оборудования и программного обеспечения общего пользования**

Стандартное оборудование.

**3.3.3 Характеристики специализированного оборудования**

Не предусматриваются.

**3.3.4 Характеристики специализированного программного обеспечения**

Не предусматриваются.

**3.3.5 Перечень и объёмы требуемых расходных материалов**

Не предусматриваются.

**3.4. Информационное обеспечение**

**3.4.1 Список обязательной литературы**

1. Смирнов В.И. Курс высшей математики. Т.4. Часть 1. - М.: Наука, 1974.

2. Гельфанд И.М., С. В. Фомин. Вариационное исчисление. - М.: Физматгиз, 1961.

3. Буслаев В.С. Вариационное исчисление. - Л.: Изд-во Ленинградского гос. ун-та, 1980.  
**3.4.2 Список дополнительной литературы**

1. В.Г.Осмоловский. Нелинейная задача Штурма-Лиувилля. С.-Пб, изд-во С.-Пб ун-та, 2003  
**3.4.3 Перечень иных информационных источников**

http://eqworld.ipmnet.ru/ru/library/mathematics/calculus.htm

**Раздел 4. Разработчики программы**

Осмоловский Виктор Георгиевич, докт. физ.-мат. наук, профессор, vicos@VO8167.spb.edu  
т. 753-71-74